Matemáticas II- 2º Bachillerato BASE Y PRODUCTO ESCALAR VECTORES I

1. Dados los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$, $\vec{c}(1,0,3)$ y $\vec{d}(-1,2,1)$
    - ¿Forman una base de $\Re^3$?
    - Expresa si es posible el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los otros tres.

2. Halla el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio anterior, así como $\left|\vec{a}\right| \ y \left|\vec{b}\right|$.

3. Sean los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(x,2,-1)$.

- Halla el valor de x, para que el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 60º.
- Para x = -2, halla las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $2\vec{u}$.

4. Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que cualquier vector es combinación lineal de los otros dos?.justifica la respuesta.

5. Dados los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$ y $\vec{c}(1,0,3)$.
    - Demuestra que forman una base en $\Re^3$
    - Halla las coordenadas de (0,0,1) en dicha base.

SOLUCIONES A LA FICHA VECTORES I

1.

- Los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$, $\vec{c}(1,0,3)$ y $\vec{d}(-1,2,1)$ no pueden formar una base, puesto que el número de vectores en la base de $\Re^3$ son tres.
- Para expresar el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los otros tres, escribimos

$\vec{b} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{c} + z\cdot\vec{d} \Rightarrow (1,2,1) = x\cdot(1,2,3) + y\,(1,0,3) + z\,(-1,2,1) \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 3x + 3y + z = 1 \end{cases}$ que resolvemos por Cramer pues el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$ con lo que el sistema es compatible determinado. x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$, y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{8}{-8} = -1$, z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{4}{-8} = \dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow \vec{b} = \dfrac{3}{2}\cdot\vec{a} - \vec{c} - \dfrac{1}{2}\cdot\vec{d}$.

2. El ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio anterior se calcula a través del producto escalar:

$$\text{Cos}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{8}{2\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\cos\frac{4}{\sqrt{21}} = 29^{\circ}\,12'\,21''$$

Los módulos están calculados ya en el denominador de la expresión anterior: $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ **y** $|\vec{b}| = \sqrt{6}$

3.

- Para que el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(x,2,-1)$ sea de 60º, hacemos que el coseno del ángulo que forman sea $\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot x + 1\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}\cdot\sqrt{x^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{x^2+5}} \Rightarrow \sqrt{11}\cdot\sqrt{x^2+5} = 2\cdot(x-1),$$

Que resolvemos elevando al cuadrado: $11(x^2+5) = 4\cdot(x^2-2x+1) \Rightarrow 7x^2+8x+51=0 \Rightarrow$ **No hay solución, es decir esos vectores no pueden formar 60º nunca.**

Para $x = -2$ las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v} = (1,1,3) + (-2,2,-1) = (-1,3,2)$,

$\vec{u}-\vec{v} = (1,1,3) - (-2,2,-1) = (3,-1,4)$ y $2\vec{u} = 2(1,1,3) = (2,2,6)$

4.

No, sólo podemos asegurar que uno es dependiente con los demás: ejemplo $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(-1,2,3)$ y $\vec{w}(-2,4,6)$, son tres vectores linealmente dependientes, y sin embargo el vector $\vec{u}$ no se puede poner como combinación lineal de los demás, al contrario que $\vec{v} = 0\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ y $\vec{w} = 0\cdot\vec{u} + 2\cdot\vec{v}$

5. Dados los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$ y $\vec{c}(1,0,3)$.

- Para demostrar que forman una base en $\Re^3$, estudiaremos primero su independencia, es decir, hallamos su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Son independientes y por tanto tres vectores que generan cualquier vector de $\Re^3$. Es decir, son base.
- Las coordenadas de (0,0,1) en dicha base las vamos a llamar (x,y,z), por tanto:
- $(0,0,1) = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + z\cdot\vec{c} \Rightarrow (0,0,1) = x\cdot(1,2,3) + y\cdot(1,2,1) + z\cdot(1,0,3) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+y+3z=1 \end{cases}$,

resolvemos por Cramer el sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2},\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

son las coordenadas pedidas.